Primero de Matemáticas
Cálculo
Primer Parcial (Curso 2002-03)

1. (**2 puntos**) Enunciar y demostrar los siguientes resultados:

   a)Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.

   b) Teorema de Rolle.

2. (**2 puntos**) Calcular el límite de las sucesiones siguientes:

$$\textbf{a)}\left\{ n \left(\frac{\sqrt[n]{e} - e^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n \operatorname{sen}(1/n)} \right) \right\} \quad \textbf{b)}\left\{ \frac{\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2} \right\}$$

3. (**2 puntos**) Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x - x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

   a) Probar que f tiene *exactamente* dos ceros α, β con $\alpha < 1 < \beta$.

   b) Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Probar que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente acotada que converge a β.

4. (**2 puntos**) Demostrar las desigualdades siguientes:

   a) $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} < \dfrac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\beta - \alpha} < \dfrac{1}{\cos^2 \beta}$, para $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

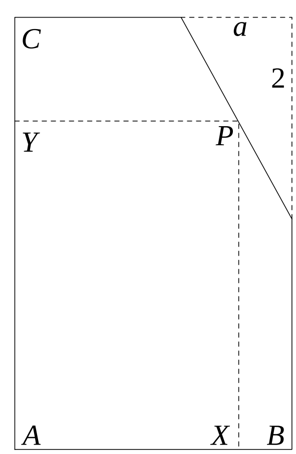
   b) $\dfrac{x^2}{4} \leq e^{x-2}$, $\forall x \geq 2$.

5. (**2 puntos**)

La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto $P = (x, y)$ sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices

$$A = (0,0),\ X = (x,0),\ P = (x,y),\ Y = (0,y)$$

tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?.



Granada, 3 de Febrero de 2003